Jurnal Nasional Holistic Science
Vol. 4, No. 3, Desember 2024, pp. 449 ~ 453

Analysis of Richardson Extrapolation Method in Improving the Accuracy of Numerical Approximation in Definite Integral Problems Using Matlab

Fachriz Effendy K[1], GiaColin Alfaro Samuel S[2], Hafiz Khalik Lubis[3], Zakiy Maulana Pulungan[4], Putri Maulidina Fadilah[5]
[1,2,3,4,5]Program Studi Statistika, Universitas Negeri Medan, Indonesia
Email: fachrizeffendyk@gmail.com; giakolinsianturi@gmail.com; hafiz777khalik@gmail.com; zakiymaulanapulungan@gmail.com

ABSTRAK

Metode numerik sangat diperlukan untuk menghitung nilai-nilai yang tidak dapat dievaluasi secara langsung. Metode seperti Trapezoidal dan Simpson sering digunakan untuk menghitung integral secara numerik, tetapi hasilnya mungkin tidak selalu memuaskan dalam hal akurasi. Di sinilah metode ekstrapolasi Richardson berperan penting. Metode ini dapat meningkatkan akurasi solusi numerik dengan menggabungkan hasil dari perhitungan dengan tingkat ketelitian yang berbeda, sehingga mengurangi kesalahan. Pertama, kami menggunakan deret Taylor untuk mendekati fungsi eksponensial di sekitar titik tertentu. Selanjutnya, kami menerapkan metode Trapezoidal untuk menghitung nilai integral secara numerik. Setelah mendapatkan hasil dari metode Trapezoidal, kami menerapkan metode ekstrapolasi Richardson untuk meningkatkan akurasi hasil tersebut. Metode ini menggabungkan hasil dari dua perhitungan dengan tingkat ketelitian berbeda untuk mengurangi galat. Untuk memverifikasi hasil dan meningkatkan efisiensi perhitungan, kami juga melakukan simulasi menggunakan MATLAB. Dan hasil yang dikeluarkan pada matlab merupakan hasil yang lebih tepat karena sudah sangat mendekati nilai eksak, dengan nilai error absolut sebesardengan nilai error absolut sebesar 0.0000000472. dan juga dengan nilai error relatif sebesar 0.000006316. yang dimana kedua error ini sudah sangat kecil dan sangat hampir mendekati 0. Hasil perhitungan dengan aproksimasi numerik manual, error yang didapat sebesar 0.000235, sementara saat menggunakan ekstrapolasi Richardson, error yang didapat sebesar 0.000006316. Maka benar terbukti jika menggunakan metode ekstrapolasi Richardson, maka dapat memperkecil error sehingga akan meningkatkan akurasi dari solusi integral.

Keyword: **Ekstrapolasi Richardson; Metode Numerik; Reduksi Error**

ABSTRACT

Numerical methods are essential for calculating values that cannot be evaluated directly. Methods such as Trapezoidal and Simpson are often used to calculate integrals numerically, but the results may not always be satisfactory in terms of accuracy. This is where the Richardson extrapolation method plays an important role. This method can improve the accuracy of numerical solutions by combining the results of calculations with different levels of accuracy, thereby reducing errors. First, we use the Taylor series to approximate the exponential function around a certain point. Next, we apply the Trapezoidal method to calculate the integral value numerically. After getting the results from the Trapezoidal method, we apply the Richardson extrapolation method to improve the accuracy of the results. This method combines the results of two calculations with different levels of accuracy to reduce errors. To verify the results and improve the efficiency of the calculation, we also performed simulations using MATLAB. And the results issued in matlab are more precise results because they are very close to the exact value, with an absolute error value of 0.0000000472. and also, with a relative error value of 0.000006316. where both of these errors are very small and very close to 0. The calculation results with manual numerical approximation, the error obtained is 0.000235, while when using Richardson extrapolation, the error obtained is 0.000006316. So, it is true that if using the Richardson extrapolation method, it can reduce the error so that it will increase the accuracy of the integral solution.

Keyword: Richardson Extrapolation; Numerical Methods; Error Reduction

Corresponding Author:
Fachriz Effendy K,
Universitas Negeri Medan,
Jl. William Iskandar Ps. V, Kenangan Baru, Kec. Percut Sei Tuan, Kabupaten Deli Serdang, Sumatera Utara 20221, Indonesia
Email: fachrizeffendyk@gmail.com

1. INTRODUCTION

Masalah integral merupakan salah satu konsep fundamental dalam kalkulus yang sering kali tidak dapat diselesaikan secara analitik. Oleh karena itu, metode numerik menjadi penting untuk memperoleh solusi aproksimasi. Dalam banyak kasus, masalah matematis yang dihadapi, seperti persamaan diferensial dan integral, terlalu rumit untuk diselesaikan dengan metode analitik tradisional. Oleh karena itu, metode numerik memberikan pendekatan alternatif yang efektif untuk mendapatkan solusi perkiraan (Zakaria & Muharramah, 2023).

Dalam konteks integral tertentu, seperti integral $I = \int_0^1 e^{-x^2} dx$, metode numerik sangat diperlukan untuk menghitung nilai-nilai yang tidak dapat dievaluasi secara langsung. Metode seperti Trapezoidal dan Simpson sering digunakan untuk menghitung integral secara numerik, tetapi hasilnya mungkin tidak selalu memuaskan dalam hal akurasi. Di sinilah metode ekstrapolasi Richardson berperan penting. Metode ini dapat meningkatkan akurasi solusi numerik dengan menggabungkan hasil dari perhitungan dengan tingkat ketelitian yang berbeda, sehingga mengurangi kesalahan (Pratama, 2021).

Keunggulan metode ekstrapolasi Richardson terletak pada kemampuannya untuk mengurangi galat (error) dalam perhitungan. Dengan memanfaatkan hasil dari dua atau lebih perhitungan dengan ketelitian berbeda, metode ini dapat menghasilkan estimasi yang lebih akurat. Hal ini sangat relevan dalam bidang statistika dan komputasi modern, di mana akurasi data dan analisis sangat penting. Penelitian oleh Zainudin (2023) menunjukkan bahwa penerapan ekstrapolasi Richardson dalam analisis data statistik dapat meningkatkan keandalan hasil secara signifikan (Firdaus et al., 2023).

Seiring dengan perkembangan teknologi komputasi, penggunaan komputer dalam penerapan metode numerik menjadi semakin penting. Komputer memungkinkan perhitungan berulang dengan cepat dan tanpa kesalahan, serta memberikan kemampuan untuk mengeksplorasi berbagai kemungkinan solusi berdasarkan perubahan parameter (Atmika, 2016). Dalam dunia yang semakin bergantung pada data dan analisis kuantitatif, kemampuan untuk melakukan perhitungan numerik dengan akurasi tinggi menjadi sangat krusial.

Firdaus mereview beberapa metode untuk menghitung integral secara numerik, termasuk metode segiempat, metode titik tengah, dan metode Simpson 1/3. Mereka menemukan bahwa metode Simpson 1/3 adalah yang paling baik dalam hal akurasi (Firdaus et al., 2023). Metode Simpson dan deret Taylor adalah dua pendekatan numerik yang umum digunakan untuk menyelesaikan masalah integral dan persamaan diferensial biasa (PDB) yang tidak dapat diselesaikan secara analitik. Metode Simpson, yang mencakup Simpson 1/3 dan Simpson 3/8, sangat bermanfaat dalam menghitung integral tertentu dengan pendekatan berbasis polinomial. Simpson 1/3 menggunakan parabola untuk memperkirakan nilai integral, sedangkan Simpson 3/8 memberikan hasil yang lebih akurat pada fungsi yang lebih kompleks dengan menggunakan polinomial orde lebih tinggi. Penggunaan perangkat lunak seperti MATLAB atau Python juga dapat meningkatkan efisiensi metode ini, meminimalkan kesalahan, dan mempercepat perhitungan, sehingga hasil yang diperoleh lebih akurat dan konsisten dibandingkan perhitungan manual (Imani et al., 2023; Kurniati et al., 2017).

Selain itu, penelitian oleh hasan juga membahas tentang metode Newton-Cotes, termasuk metode Simpson 3/8, yang merupakan metode integrasi numerik yang unggul karena menggunakan polinomial interpolasi orde yang lebih tinggi (Hasan et al., 2024).

Di sisi lain, deret Taylor adalah metode numerik yang digunakan untuk memperkirakan solusi PDB dengan mengekspansi fungsi ke dalam bentuk polinomial di sekitar titik tertentu. Teknik ini sangat berguna dalam memodelkan fenomena fisika, seperti gerak jatuh bebas, yang sulit dianalisis menggunakan metode analitik. Dengan bantuan perangkat lunak seperti MATLAB, metode deret Taylor tidak hanya memungkinkan perhitungan yang lebih efisien, tetapi juga memberikan visualisasi fenomena fisik yang lebih baik. Simulasi berbasis MATLAB memperkuat keunggulan deret Taylor sebagai pendekatan numerik yang andal, terutama untuk menyelesaikan permasalahan yang melibatkan dinamika sistem (Muslim et al., 2024).

Namun, metode ekstrapolasi Richardson masih memiliki keunggulan sendiri. Penelitian oleh Mulyono menunjukkan bahwa metode ekstrapolasi Richardson lebih baik daripada metode ekstrapolasi Aitken dalam hal akurasi hasil integral numerik (Mulyono et al., 2023). Demikian pula, penelitian oleh Ermawati menunjukkan bahwa metode Romberg jauh lebih akurat dibandingkan dengan metode simulasi Monte Carlo, namun metode ekstrapolasi Richardson tetap memiliki keuntungan dalam situasi tertentu (Ermawati et al., 2017).

Dalam rangka meningkatkan akurasi integrasi numerik, beberapa penelitian juga membahas tentang penerapan metode ekstrapolasi Richardson dalam variasi kondisi. Misalnya, penelitian oleh Pratama (2021) menunjukkan bahwa metode ekstrapolasi Richardson dapat meningkatkan akurasi solusi numerik dengan efektif, terutama dalam menghadapi fungsi yang kompleks (Pratama, 2021). Oleh karena itu, penelitian ini akan mengeksplorasi penerapan metode ekstrapolasi Richardson pada integral tertentu sebagai upaya untuk meningkatkan akurasi solusi numerik. Dengan merujuk pada studi-studi sebelumnya dan menerapkan metodologi yang tepat, diharapkan penelitian ini dapat memberikan kontribusi signifikan terhadap pengembangan metode numerik dan aplikasinya dalam berbagai bidang ilmu.

2. RESEARCH METHOD

Penelitian ini menggunakan fungsi integral tertentu $I = \int_0^1 e^{-x^2} dx$. Untuk menghitung nilai integral ini, dilakukan perhitungan manual menggunakan beberapa metode aproksimasi numerik.

Langkah awal menggunakan deret Taylor untuk mendekati fungsi eksponensial e^{-x^2} di sekitar titik tertentu. Deret Taylor memberikan ekspansi fungsi dalam bentuk polinomial yang dapat digunakan untuk menghitung nilai integral dengan lebih mudah. Dengan menggunakan beberapa suku dari deret Taylor, kami memperoleh nilai aproksimasi awal untuk integral tersebut.

Selanjutnya, menerapkan metode Trapezoidal untuk menghitung nilai integral secara numerik. Setelah mendapatkan hasil dari metode Trapezoidal, menerapkan metode ekstrapolasi Richardson untuk meningkatkan akurasi hasil tersebut. Metode ini menggabungkan hasil dari dua perhitungan dengan tingkat ketelitian berbeda untuk mengurangi galat.

Verifikasi hasil dan peningkatan efisiensi perhitungan melalui simulasi menggunakan MATLAB. Skrip MATLAB digunakan untuk menghitung nilai integral secara otomatis menggunakan metode Trapezoidal dan ekstrapolasi Richardson, sehingga memungkinkan perbandingan antara hasil manual dan hasil komputasi.

3. RESULTS AND DISCUSSION

Pada penelitian ini, penghitungan nilai hasil dari integral $I = \int_0^1 e^{-x^2} dx$, secara matematis, nilai integral tersebut memiliki nilai eksak 0.7468241328124271. dan pada penilitian ini perhitungannya akan dilakukan dengan 2 cara, yaitu perhitungan manual menggunakan aproksimasi numerik, dan juga perhitungan menggunakan metode ekstrapolasi Richardson secara manual dan menggunakan matlab. Nantinya dari hasil uji ini, dapat dilihat perbandingan dari kedua pengerjaan dengan solusi eksak dari persamaan integral yang telah diketahui.

Untuk cara pertama yaitu perhitungan secara manual menggunakan aproksimasi numerik. Melalui aproksimasi numerik ini, penyelesaian integral dilakukan dengan menggunakan 3 metode seperti metode trapesium, metode simpson, dan terakhir menggunakan deret taylor. Dan berikut merupakan penyelesaiannya menggunakan deret taylor:

$$e^{-x^2} \approx 1 - x^2 + \frac{x^4}{2!} - \frac{x^6}{3!} + \cdots$$

Sehingga, integralnya akan menjadi:

$$\int_0^1 e^{-x^2} dx \approx \int_0^1 (1 - x^2 + \frac{x^4}{2!} - \frac{x^6}{3!})\, dx$$

Selanjutnya, dilakukan perhitungan satu persatu masing-masing integral:

$$\int_0^1 1\, dx = 1,\ \int_0^1 x^2 dx = \frac{1}{3},\ \int_0^1 \frac{x^4}{2} dx = \frac{1}{10},\ \int_0^1 \frac{x^6}{6} dx = \frac{1}{42}$$

$$I \approx 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{10} - \frac{1}{42} \approx 0.747$$

Dari hasil diatas, maka error absolut dari aproksimasi numerik sebesar $|0.7468241328124271 - 0.747|$ = 0.0001758671875729 dan error relatifnya sebesar $\frac{0.0001758671875729}{0.7468241328124271}$= 0.000235. kedua nilai error ini sudah cukup rendah dan hampir mendekati 0, namun, berdasarkan teori, ekstrapolasi Richardson dapat memperkecil seleisih error perhitungan dengan nilai sebenarnya.

Setelah perhitungan menggunakan aproksimasi, selanjutnya akan dibahas mengenai perhitungan menggunakan metode ekstrapolasi Richardson. Berikut merupakan perhitungan secara manual:

Fungsi yang akan diintegrasi adalah $f(x) = e^{-x^2}$, akan digunakan metode trapesium dengan dua ukuran langkah (h) yang berbeda, yaitu h_1 dan $h_2 = \frac{h_1}{2}$ lalu menerapkan ekstrapolasi Richardson.

Selanjutnya, dilakukan ukuran langkah. Dilakukan permisalan:

- Subdivisi pertama: $N_1 = 4$ $\left(h_1 = \frac{1-0}{4} = 0.25\right)$

- Subdivisi kedua: $N_2 = 8 \left(h_2 = \frac{1-0}{8} = 0.125\right)$

Lalu dilakukan perhitungan integral dengan metode trapesium:

- Dengan $N_1 = 4\ (h_1 = 0.25)$

Disini terdapat 5 titik grid yaitu, $x = 0,\ 0.25,\ 0.5,\ 0.75,\ dan\ 1$
Selanjutnya dilakukan penghitungan menggunakan metode trapesium:

$$T_1 = \frac{h_1}{2}\left[f(0) + 2\cdot\left(f(0.25) + f(0.5) + f(0.75)\right) + f(1)\right]$$

Sehingga,

$$T_1 = \frac{0.25}{2}\left[1 + 2\ \cdot(0.9394 + 0.7788 + 0.5698) + 0.3679\right]$$
$$T_1 = 0.125\left[1 + (2\cdot 2.2879) + 0.3679\right]$$
$$T_1 = 0.125\ (\ 5.9437)\ \approx 0.74296$$

- Dengan $N_2 = 8\ (h_2 = 0.125)$

Disini terdapat 9 titik grid, yaitu, $x = \ 0, 0.125, 0.25, 0.375, 0.5, 0.625, 0.75, 0.875, 1$
Selanjutnya dilakukan penghitungan menggunakan metode trapesium:

$$T_2 = \frac{h_2}{2}\left[f(0) + 2\big(f(0.125) + f(0.25) + f(0.375) + f(0.5) + f(0.625) + f(0.75)\big) + f(0.875) + f(1)\right]$$

$$T_2 = \frac{0.125}{2}\left[1 + 2\ \cdot(0.9845 + 0.9394 + 0.8669 + 0.7788 + 0.6766 + 0.5698 + 0.4602) + 0.3679\right]$$

$$T_2 = 0.0625\left[1 + 2\cdot(5.2762 + 0.3679)\right]$$

$$T_2 = 0.0625\ (11.9203) \approx 0.74502$$

Setelah didapat nilai T_1 dan T_2, dilakukan penerapan ekstrapolasi Richardson, dengan rumus:

$$I_{Richardson} = \frac{4T_2 - T_1}{3}$$

Sehingga: $I_{Richardson} = \frac{4\cdot 0.74502 - 0.74296}{3} = \frac{2.23712}{3} \approx 0.74571$

Cara diatas merupakan cara perhitungan metode ekstrapolasi Richardson menggunakan cara manual yang dimana tentunya terdapat sedikit error pada perhitungan koma nya. Untuk itu penting untuk pengecekan ulang menggunakan applikasi pemrograman tambahan seperti matlab untuk menguji ulang. Setelah di cek menggunakan matlab dengan input sebagai berikut:

```
% Fungsi yang akan diintegralkan
f = @(x) exp(-x.^2);

% Batas integral
a = 0;
b = 1;

% Jumlah subdivisi awal
N1 = 10; % Subdivisi pertama (kasar)
N2 = 20; % Subdivisi kedua (lebih halus)

% Metode Trapesium
h1 = (b - a) / N1; % Panjang langkah untuk N1
x1 = a:h1:b; % Titik-titik grid
T1 = h1 * (0.5 * f(a) + sum(f(x1(2:end-1))) + 0.5 * f(b)); % Aproksimasi Trapesium untuk N1

h2 = (b - a) / N2; % Panjang langkah untuk N2
x2 = a:h2:b; % Titik-titik grid
T2 = h2 * (0.5 * f(a) + sum(f(x2(2:end-1))) + 0.5 * f(b)); % Aproksimasi Trapesium untuk N2

% Ekstrapolasi Richardson
I_richardson = (4 * T2 - T1) / 3;

% Output
fprintf('Hasil metode ekstrapolasi Richardson: %.8f\n', I_richardson);

```

Gambar 1. Kode Program Matlab

Didapat hasil output pada matlab yang menyatakan nilai ekstrapolasi Richardson bernilai 0.74682418

```
Hasil metode ekstrapolasi Richardson: 0.74682418
```

Gambar 2. Output Program

Dan hasil yang dikeluarkan pada matlab merupakan hasil yang lebih tepat karena sudah sangat mendekati nilai eksak dari $I = \int_0^1 e^{-x^2} dx$. Sendiri dengan nilai error absolut sebesar $|0.7468241328124271 - 0.74682418|$ = 4.72 × 10^{-8} atau 0.0000000472. dan juga dengan nilai error relatif sebesar $\frac{4.72 \times 10^{-8}}{0.7468241328124271}$ = 6.316 × 10^{-6}% atau error relatifnya sebesar 0.000006316. yang dimana kedua error ini sudah sangat kecil dan sangat hampir mendekati 0.

4. CONCLUSION

Dari hasil perhitungan, untuk nilai $I = \int_0^1 e^{-x^2} dx$, hasil perhitungan dengan aproksimasi numerik manual, error yang didapat sebesar 0.000235, sementara saat menggunakan ekstrapolasi Richardson, error yang didapat sebesar 0.000006316. Maka benar terbukti jika menggunakan metode ekstrapolasi Richardson, maka dapat memperkecil error sehingga akan meningkatkan akurasi dari solusi integral. Sehingga untuk melakukan aproksimasi pada integral yang lebih tepat adalah dengan menggunakan Ekstrapolasi Richardson dengan nilai error yang sangat kecil dan sangat dekat dengan 0. Pada contoh yang dibahas ini, integral yang digunakan merupakan integral yang cukup sulit untuk dikerjakan, jadi ekstrapolasi Richardson ini akan semakin terpakai dan semakin berguna jika integral yang ingin diaproksimasi merupakan integral yang sangat rumit dan membutuhkan waktu yang cukup lama jika menggunakan perhitungan manual. Perhitungan menggunakan metode ekstrapolasi Richardson juga akan mendapatkan hasil yang lebih valid jika dilakukan penghitungan menggunakan applikasi pemrograman tambahan seperti matlab, terlihat ada sedikit perbedaan pada ekstrapolasi Richardson perhitungan manual dengan ekstrapolasi Richardson menggunakan matlab, hal ini bisa saja terjadi karena pada perhitungan manual, ada beberapa nilai koma yang sangat kecil yang tidak terikut dan tidak tertulis sehingga itu cukup memengaruhi hasil akhirnya. Sementara jika menggunakan matlab akan didapat hasil yang lebih akurat dan lebih tepat.

REFERENCES

Atmika, I. K. A. (2016). *Metode numerik*. Informatika.

Ermawati, E., Rahayu, P., & Zuhairoh, F. (2017). Perbandingan solusi numerik integral lipat dua pada fungsi aljabar dengan metode Romberg dan simulasi Monte Carlo. *Jurnal MSA (Matematika dan Statistika serta Aplikasinya), 5*(1), 46.

Firdaus, A., Amrullah, A., Wulandari, N. P., & Hikmah, N. (2023). Analisis efisiensi integral numerik metode Simpson 1/3 dan Simpson 3/8 menggunakan program software berbasis Pascal. *Jurnal Teknologi Informatika dan Komputer, 9*(2), 1051–1064. https://doi.org/10.37012/jtik.v9i2.1737

Hasan, R. R., Amrullah, A., Kertiyani, N. M. I., & Prayitno, S. (2024). Perbandingan integrasi numerik metode Simpson tiga per delapan dan Romberg menggunakan pemrograman Perl Hypertext Preprocessor. *MAJAMATH: Jurnal Matematika dan Pendidikan Matematika, 7*(2), 94–106.

Imani, R., Nasmirayanti, R., & Sahputra, D. E. (2023). 1/3 Simpson's rule for analysis of structure dynamic response due to earthquake load. *BAREKENG: Jurnal Ilmu Matematika dan Terapan, 17*(2), 641–648. https://doi.org/10.30598/barekengvol17iss2pp0641-0648

Kurniati, A., Riyanti, & Hidayah, N. I. (2017). Metode Simpson 1/3 dan metode Simpson 3/8. *Metode Simpson 1/3 dan 3/8, 4*(1), 24–31.

Mulyono, Eka, M., Suryana, Pramudio, Hazizi, Sumargo, B., & Sukatmi, S. (2023). Kajian metode ekstrapolasi Richardson dan Aitken: Suatu metode untuk menghitung integral tertentu secara numerik. *Jurnal Review Pendidikan dan Pengajaran, 6*(4), 3300–3310. http://journal.universitaspahlawan.ac.id/index.php/jrpp

Muslim, R., Safitra, S., Lubis, R., Pebiana, F., & Putri, P. (2024). Analisis numerik gerak jatuh bebas: Penerapan metode deret Taylor dengan MATLAB. *Jurnal Matematika dan Aplikasinya, 1*(2), 594–599.

Pratama, F. I. (2021). *Pengenalan terhadap metode numerik*.

Zakaria, L., & Muharramah, U. (2023). *Pengantar metode numerik: Solusi masalah dengan matematika*.